DS n°8 : Fractions rationnelles, Analyse asymptotique, EV

Durée : 4 heures. Calculatrices non autorisées.
Toute affirmation non triviale doit être justifiée.

Exercice 1 : Polynômes et fractions rationnelles

1) Décomposer en éléments simples $\dfrac{X^3}{X^3+3X^2-4}$ dans $\mathbb{C}$.

2) Décomposer en éléments simples $\dfrac{2}{X^4-1}$ dans $\mathbb{R}$.

3) On cherche à factoriser le polynôme X^4+X^2+1 dans $\mathbb{R}[X]$.

- **a)** Résoudre l'équation $z^2+z+1=0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
- **b)** En déduire une factorisation de X^4+X^2+1 dans $\mathbb{C}[X]$.
- **c)** Conclure.

Exercice 2 : Espaces vectoriels (et un peu de DL)

On rappelle que $C^\infty(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞.

1) Montrer que $C^\infty(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Dans ce qui suit, on note $p, q, r \in C^\infty(\mathbb{R})$ trois fonctions définies par

$$p(x) = e^x \qquad q(x) = e^{2x} \qquad r(x) = e^{x^2}$$

et on note $\mathcal{F} = (p, q, r)$, ainsi que $E = \text{Vect}(p, q, r)$ le sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R})$ engendré par p, q, r.

2) On propose de montrer que $\mathcal{F}$ est libre de trois façons. Soit donc a, b, c des réels tels que $ap+bq+cr=0$.

- **a)** L'étudiante Eva a prouvé que $\mathcal{F}$ est libre en évaluant $(ap+bq+cr)(x)=0$ en plusieurs points x. Écrire une preuve à partir de cette idée.
- **b)** L'étudiant Dave a utilisé un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $ap+bq+cr$. Écrire une preuve à partir de cette idée.
- **c)** L'étudiant Liam a utilisé le comportement des fonctions p, q et r en $+\infty$. Écrire une preuve à partir de cette idée.

3) Est-ce que la famille $(\text{ch}, \text{sh}, p)$ est libre ? Justifier.

On pose

$$f : x \mapsto \text{ch}^2 x \qquad g : x \mapsto \text{sh}^2 x \qquad h : x \mapsto \text{ch}(2x)$$

On considère la famille $\mathcal{B} = (f, g, h)$, ainsi que $F = \text{Vect}(f, g, h)$.

4) Est-ce que la famille (f, g, h) est libre ? Justifier.

5) Donner une base de F.

6) Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire les développements limités à l'ordre n en 0 de f, g, h.

Exercice 3 : DL

1) Déterminer le $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$.

2) Déterminer le $DL_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de $\tan x$.

Problème : Étude de fonction et accélération de convergence

On considère la fonction $f : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

1) Donner le domaine de définition de f.

2) Montrer que

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} e - e\frac{x}{2} + e\frac{11}{24}x^2 + o(x^2)$$

3) En déduire la limite de la fonction f en 0. Dans la suite, on considère avoir prolongé f par cette valeur en 0.

4) Montrer que f (ainsi prolongée) est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

5) Expliciter l'équation de la tangente à f en 0, ainsi que la position relative de la courbe représentative de f par rapport à cette tangente.

6) Est-ce que f admet un extremum local en 0 ? Si oui, préciser si c'est un minimum ou un maximum.

7) Déterminer un équivalent de $f(x) - e$ lorsque x tend vers 0.

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la suite $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

8) En utilisant les questions précédentes, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e et donner un équivalent de la suite $(u_n - e)_{n\in\mathbb{N}}$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la suite $v_n = 2u_{2n} - u_n$.

9) Donner un équivalent de la suite $(v_n - e)_{n\in\mathbb{N}}$. Quel est l'intérêt de cette suite ?